986- لتكن $\varphi_n$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\varphi_n(x)=n\ln x+1-\frac{1}{x}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$
ولتكن $f_n$ الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي $f_n(x)=(x-1)^n\ln x$

A. 1] أ) ادرس تغيرات $\varphi_n$
ب) باستعمال قيمة $\varphi_n(1)$ ، حدد إشارة $\varphi_n(x)$ على $]0;+\infty[$

2] أ) بيّن أن : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ f_1'(x)=\varphi_1(x)$
وأن : $(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\})(\forall x\in]0;+\infty[)\ f_n'(x)=(x-1)^{n-1}\varphi_n(x)$
ب) نفترض في هذا السؤال أن $n$ فردي
أعط جدول تغيرات $f_n$
ج) نفترض في هذا السؤال أن $n$ زوجي . أعط جدول تغيرات $f_n$ .

3] نرمز بـ $\mathscr{C}_n$ لمنحنى الدالة $f_n$ في معلم متعامد ممنظم.
أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$
ب) ارسم $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$

B. لتكن $F_n$ الدالة الأصلية للدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$ بحيث $F_n(1)=0$

1] أ) بيّن أن $(\forall x\in[1;+\infty[)\ 0\leq F_n(x)\leq\frac{(x-1)^{n+1}\ln x}{n+1}$
ب) بين أنه لكل $x$ من $]1;2[$ ، فإن المتتالية $(F_n(x))_{n\geq1}$ متقاربة وحدد نهايتها.
ج) نضع $u_n=F_n(2)$ . حدد عدداً صحيحاً طبيعياً $n_0$ بحيث $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(n\geq n_0\Rightarrow 0\leq u_n\leq 0{,}01)$

2] احسب $F_1(x)$ بدلالة $x$ [ يمكنك أولا حساب مشتقة $x\mapsto\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x$ ]

3] ليكن $n$ من $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ و $x$ من $[1;+\infty[$
لكل $t$ من $[1;x]$ ، نضع : $S_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(t-1)^k=1-(t-1)+(t-1)^2-\dots+(-1)^n(t-1)^n$
أ) بيّن أن $S_n(t)=\frac{1}{t}+\frac{(-1)^n(t-1)^{n+1}}{t}$
ب) استنتج أن : $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}(x-1)^{k+1}=\ln x-(-1)^{n+1}G_n(x)$
حيث $G_n$ هي الدالة الأصلية للدالة $g_n: x\mapsto\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$ على $[1;+\infty[$ و $G_n(1)=0$
ج) بيّن أن : $F_n(x)=\frac{(x-1)^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x-1)^{k+1}}{k+1}\right)$

**987 -** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \;;\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن $\mathcal{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم

**A.** 1] بيّن أن $f$ متصلة على اليمين في $0$.

2] ادرس قابلية اشتقاق $f$ على اليمين في $0$ وأول هندسياً النتيجة المحصل عليها.

3] بيّن أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}$

**B.** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}$

1] تحقق أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ \left(f(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x)=0\right)$

2] أ. احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ وحدد تغيرات $g$

. استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين $a$ و $b$ بحيث : $0<a<\frac{1}{3}<b$

3] استنتج أن : $f'(\alpha)=0$ ; $\left(\exists\alpha\in\,]a;b[\right)$

**C.** 1] تحقق أن : $f'(x)=\frac{x+3}{x+1}-2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

2] بيّن أن $0<f''(x)$ $(\forall x>0)$ واستنتج أن $\alpha$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f'(x)=0$ ثم حدد تغيرات $f$

3] تحقق أن : $\frac{2}{5}<\alpha<\frac{1}{2}$ و أن : $f(\alpha)=\frac{-2\alpha}{1+\alpha}$

4] حدد الحل $\beta$ للمعادلة $f(x)=0$ بحيث $\beta>0$ . ارسم $\mathcal{C}$.

**D.** لتكن $h$ قصور $f$ على $[\beta;+\infty[$.

1] بيّن أن $h$ تقابل من $[\beta;+\infty[$ نحو مجال $E$ يتم تحديده.

2] استنتج أنه لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، فإن المعادلة $f(x)=\frac{1}{n}$ تقبل حلاً وحيداً $u_n$ على $[\beta;+\infty[$

3] أ) حدد تغيرات $h^{-1}$ على $E$

ب) بيّن أن المتتالية $(u_n)$ تناقصية قطعاً ومتقاربة.

ج) حدد نهاية $(u_n)$ .

-1068

A. 1] بيّن أن : $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$

2] استنتج أن : $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)\quad t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$

B. لتكن $\varphi$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

1] حدد $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ وادرس تغيرات $\varphi$

2] استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.

C. لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{(x+1)\ln x}{2(x-1)}\ ;\ x\neq 1, x>0 \\ f(1)=1\end{cases}$

وليكن $\mathscr{C}$ منحنى $f$ في معلم متعامد ممنظم

1] حدد فروع $\mathscr{C}$ اللانهائية.

2] أ) احسب $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left(\ln(1+t)-\frac{2t}{t+2}\right)$ ثم بيّن أن $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

ب) بيّن : $\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(1)}{\frac{1}{x}-1}=-x\,\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ ثم استنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق في 1.

3] ادرس تغيرات $f$ وارسم $\mathscr{C}$.

D. 1] لكل $n$ من $\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ، بيّن أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل بالضبط حلين $x_n$ و $y_n$

بحيث : $0<x_n<1<y_n$

2] بيّن أن المتتالية $(x_n)$ تناقصية وأن المتتالية $(y_n)$ تزايدية

3] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\})\quad x_ny_n=1$

4] بيّن أن : $(\forall n\geq 2)\quad y_n>e^n$

5] حدد نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)$ و $(y_n)$.

6] حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln x_n}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln y_n}{n}$

-1069 A. نعتبر الدالة $\varphi$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\varphi(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$

1] احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

2] أ) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto \ln(1+t)$ في $[0;x]$ ،

بيّن أن : $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

ب) ادرس تغيرات $\varphi$ على $\mathbb{R}_+^*$

ج) بيّن أن : $\varphi(\alpha)=2$ ; $\left(\exists!\alpha\in\left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\right)$ ثم حدد إشارة $\varphi(x)-2$

B. لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{4x^2}{\ln(1+x)}$$

1] احسب نهايتي $f$ عند محدّي $\mathbb{R}_+^*$

2] أ) بيّن أن : $f'(x)=\dfrac{2+\varphi(x)}{(\varphi(x))^2}\varphi'(x)\,\big(\varphi(x)-2\big)$ $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

ثم أعط جدول تغيرات $f$ .

ب) تحقق أن $f(\alpha)=4$

ج) حدّد الفرع اللانهائي للمنحنى $\mathscr{C}_f$ بجوار $+\infty$ ثم ارسم $\mathscr{C}_f$ .

C. لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\ln\sqrt[2k]{1+k}+\frac{2k}{\ln\sqrt[2k]{1+k}}\right)$$

1] تحقق أن : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

2] بيّن أن : $u_n\geq 4n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

لتكن المجموعة $\mathcal{D} = ]-\infty;-1[ \cup [0;+\infty[$

A. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathcal{D}$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & ; x \in \mathcal{D}\setminus\{0\} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1] بيّن أن $f$ متصلة على اليمين في $0$

2] ادرس قابلية اشتقاق $f$ على اليمين في $0$.

3] أ) احسب $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathcal{D}\setminus\{0\}$

ب) ادرس الدالة $f'$ على $\mathcal{D}\setminus\{0\}$ : النهايات والتغيرات

ج) استنتج أن : $f'(x) > 0$ $(\forall x \in \mathcal{D}\setminus\{0\})$

د) أعط جدول تغيرات $f$

هـ) ليكن $\mathcal{C}$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

ارسم المنحنى $\mathcal{C}$.

B. ليكن $\Delta$ المستقيم الذي معادلته $x = -\frac{1}{2}$

و ليكن $\Gamma$ صورة $\mathcal{C}$ بالتماثل المحوري الذي محوره $\Delta$

بيّن أن $\Gamma$ هو المنحنى الممثل للدالة $g$ المعرفة بما يلي : $g(x) = f(-1-x)$

C. 1] بيّن أن : $f(n) < 1 < g(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2] نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بمايلي

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{و} \quad v_n = u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

أ) بين أن ،
$$\begin{cases} u_n < e < v_n \\ v_n - u_n < \frac{e}{n} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

ب) استنتج مما سبق نهاية كل من $(u_n)$ و $(v_n)$

1071- A. لتكن $\varphi$ الدالة العددية المعرفة على $I=[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ بما يلي:

$$\varphi(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}$$

1] بيّن أن $\varphi$ قابلة للاشتقاق على $I$ وأن: $(\forall t\in I)\ |\varphi'(t)|\le 2t^2|t|$

2] بيّن أن: $(\forall x\in I)\ |\varphi(x)|\le \frac{1}{2}x^4$

3] بيّن أن: $\lim_{x\to0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$

4] حدد $\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)}{x^3}$

B. لكل عدد $n$ من $\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$، نعتبر الدالة $f_n$ المعرفة على $D=]-\infty;1[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x)=n+\frac{(n-1)\ln(1-x)}{x} & ;\ x\neq0 \\ f_n(0)=1 \end{cases}$$

وليكن $\mathcal{C}_n$ منحنى $f_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1] بيّن أن $f_n$ متصلة في $0$.

2] احسب $\lim_{x\to-\infty}f_n(x)$ و $\lim_{x\to1^-}f_n(x)$ وأول هندسياً النتائج.

3] أ) ادرس قابلية اشتقاق $f_n$ في $0$.

ب) تحقق أن $(\forall x\in D\setminus\{0\})\ f_n'(x)=-(n-1)\frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}$

4] نضع: $u(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$ لكل $x$ من $D$.

أ) ليكن $x$ من $]0;1[$ . بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على $u$، بيّن أن:

$$(\exists\alpha\in]0;x[)\ ;\ u(x)=-x\ln(1-\alpha)$$

ب) ليكن $x$ من $]-\infty;0[$ . بيّن أن: $(\exists\beta\in]x;0[)\ ;\ u(x)=-x\ln(1-\beta)$

ج) استنتج أن $(\forall x\in D\setminus\{0\})\ u(x)>0$ ثم ضع جدول تغيرات $f_n$

5] ارسم $\mathcal{C}_2$.

6] أ) بيّن أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $x_n$ في المجال $D$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq2)$

ب) احسب $f_n(x_{n+1})$ واستنتج أن $(\forall n\geq2)\ x_n>x_{n+1}>0$

ج) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$ متقاربة.

نرمز بـ $l$ لنهاية المتتالية $(x_n)$

د) بيّن أن: $0\leq l<1$

هـ) بيّن أن $l+\ln(1-l)=0$

و) تحقق أن المعادلة $x+\ln(1-x)=0$ ليس لها حل في $]0;1[$
واستنتج أن $l=0$.

C. لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} & ;\ x\neq0 \\ g(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

وليكن $\Gamma$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1] بيّن أن $g$ قابلة للاشتقاق في $0$.

حدد معادلة المماس للمنحنى $\Gamma$ في النقطة ذات الأفصول $0$.

2] لتكن $v$ الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي $v(x)=\frac{-x^2-2x}{1+x}+2\ln(1+x)$

أ) ادرس تغيرات $v$.

ب) حدد $v(0)$ ثم استنتج إشارة $v(x)$ على $]-1;+\infty[$

3] ادرس تغيرات $g$ ثم ارسم $\Gamma$.